Clase 11: Trayectorias

C. J. Vanegas

27 de abril de 2008

Definición 1. *Una trayectoria o camino en* $\mathbb{R}^n$ *es una aplicación* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.
Si $n = 2$ *es una trayectoria en el plano.*
Si $n = 3$ *es una trayectoria en el espacio.*
La imagen de c *se llama curva y la denotaremos por* C, *donde* $c(a)$ *y* $c(b)$ *son sus extremos.*
Se dice que la trayectoria c *parametriza la curva* C

Ejemplo 1. $c_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $c(t) = (\cos t, \sin t)$
$c_2 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ $c(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$
$c_1 \neq c_2$ *pero parametrizan la misma curva.*

Ejemplo 2. *La recta* L *en* $\mathbb{R}^3$ *que pasa por el punto* $(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0)$ *con dirección del vector* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *es la imagen de la trayectoria* $c(t) = (\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0) + t(v_1, v_2, v_3)$, $t \in \mathbb{R}$ *(La noción de curva incluye las rectas como casos especiales).*

Ejemplo 3. *Encontrar una parametrización para el triángulo de vértices* $(-1, -1); (7, -1); (7, 7)$.

Solución 1. $c = c_1 \cap c_2 \cap c_3$
$c_1 : [-1, 7] \to \mathbb{R}^2$; *dada por:* $c_1(t) = (t, -1)$
$c_2 : [-1, 7] \to \mathbb{R}^2$; *dada por:* $c_2(t) = (7, t)$
$c_3 : [-1, 7] \to \mathbb{R}^2$; *dada por:* $c_3(t) = (t, t)$
$y - (-1) = m(x - (-1)) \Rightarrow y + 1 = m(x + 1)$ *si* $m = \dfrac{7+1}{7+1} = 1 \Rightarrow y + 1 = x + 1 \Rightarrow y = x.$

Ejemplo 4. *Encontrar una parametrización para la parábola* $y = x^2$. ***ver figura 1***

Solución 2. $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$; *dada por:* $c(t) = (t, t^2)$.

Supongamos que $c(t)$ origina la curva trazada por una partícula y t es el tiempo, entonces podemos definir <u>El vector velocidad</u> de la siguiente manera:

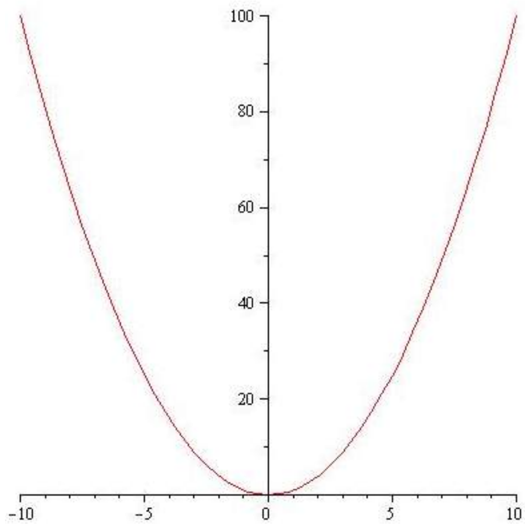

Figura 1: $y = x^2$

Si c es una trayectoria y es diferenciable, decimos que c es una trayectoria diferenciable y definimos la velocidad de c en el instante t como:

$$\boxed{c'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h}}$$

y la rapidez de la trayectoria $c(t)$ como la longitud del vector velocidad : $s = \|c'(t)\|$.
Por lo general el vector $c't$ se traza con origen en el punto $c(t)$.

Si$c(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ entonces $\begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{pmatrix}_{n \times 1}$ o $c'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) & ... & x_n'(t) \end{pmatrix}_{1 \times n}$

0.1. Vector y recta tangente

Definición 2. Vector tangente
La velocidad $c'(t)$ es un vector tangente a la trayectoria $c(t)$ en el instante t. si $c'(t) \neq 0$, entonces $c'(t)$ es un vector tangente a la curva C (imagen de c) en el punto $c(t)$.

Ejemplo 5. *Calcular el vector tangente a la trayectoria $c(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$ en $t = 0$.*

Solución 3. $c'(t) = (2\cos t(-\sin t), 3 - 3t^2, 1) \Rightarrow c'(0) = (2\cos(0)(-\sin 0), 3 - 3(0)^2, 1) = (0, 3, 1)$

Definición 3. Recta tangente

La recta tangente a una trayectoria en un punto $c(t_0)$, es la recta que pasa por ese punto con la dirección del vector tangente. Su ecuación es: $\boxed{\ell(t) = c(t_0) + (t - t_0)c'(t_0),\ si\ c'(t_0) \neq 0}$.
Si C es la imagen de c, entonces la recta que traza ℓ es la recta tangente a C en $c(t_0)$
Físicamente se puede interpretar el movimiento sobre la recta tangente como la trayectoria que seguiría una partícula sobre la curva si se la liberase en un determinado instante.

Ejemplo 6. *Supongamos que una partícula que sigue la trayectoria $c(t) = (\sin(e^t), t, 4 - t^3)$ se sale por la tangente en el instante $t_0 = 1$. Calcular la posición de la partícula en el instante $t_1 = 2$.*

Solución 4. *El vector velocidad es: $c'(t) = (e^t \cos(t), 1, -3t^2)$ que en el instante $t_0 = 1$ es el vector: $c'(t_0) = c'(1) = (e^1 \cos(1), 1, -3(1)^2) = (e \cos(1), 1, -3)$.*
Por otro lado en el instante $t_0 = 1$ la partícula está en $c(t) = (\sin(e^1), 1, 4 - (1)^3) = (\sin(e), 1, 3)$, así la ecuación de la recta tangente es: $\ell(t) = c(t_0)+(t-t_0)c'(t_0)) = (\sin(e), 1, 3)+ (t - 1)(e \cos(1), 1, -3)$.
En el instante $t_1 = 2$, la posición de la partícula sobre esta recta es: $\ell(2) = (\sin(e), 1, 3) + 2(e \cos(1), 1, -3) = (\sin(e) + e \cos(1), 2, 0)$.

1. Longitud de arco

Nos preguntamos cuál es la longitud de una trayectoria $c(t)$. Como la rapidez $\|c'(t)\|$ mide la razón de cambio de la distancia recorrida por una partícula con respecto de la distancia recorrida por una partícula que se mueve sobre la curva debe ser igual a la integral de la rapidez con respecto al tíempo en el intervalo $[t_0, t_1]$ que diga el trayecto: $\boxed{L(c) = \int_{t_0}^{t_1} \|c'(t)\| dt}$ también llamamos a esta longitud de trayectoria, longitud arco. Si $c(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ entonces $L(c) = \displaystyle\int_{t_o}^{t_1} \sqrt{(x_1'(t))^2 + ... + (x_n'(t))^2} dt$

Ejemplo 7. *Hallar la longitud de arco de: $c(t) = (t, t \sin t, t \cos t)$ en $[0, \pi]$.* ***ver figura 2***

Solución 5. $c'(t) = (1, \sin t + t \cos t, \cos t - t \sin t)$

$$L(c) = \int_0^\pi \sqrt{1 + (\sin t + t \cos t)^2 + (cost - t \sin t)^2} dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{1 + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + \cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t dt} = \int_0^\pi \sqrt{2 + t^2} dt =$$

$$\int_0^\pi \sqrt{(\sqrt{2})^2 + t^2 dt} = \frac{t}{2}\sqrt{t^2 + 2} + \log|t + \sqrt{t^2 + 2}||_0^\pi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2 + 2} + \log|\pi + \sqrt{\pi^2 + 2}|.$$

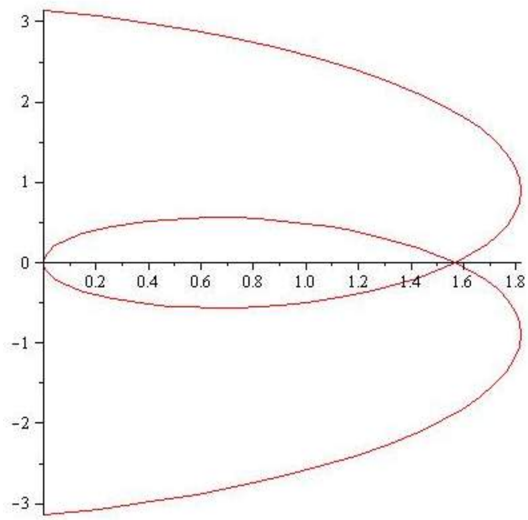

Figura 2: $c(t) = (t, t\sin t, t\cos t)$

Observación 1. *Si una curva está formada por un número finito de trozos, cada uno de los cuales es C^1, calculamos su longitud de arco sumando las longitudes de cada uno de los trozos. (**ver ejercicio resuelto en el libro**).*

1.1. La diferencial de la longitud de arco

Un desplazamiento infinitesimal de una partícula que sigue una trayectoria $c(t) = (x(t), y(t)z(t))$ es $ds = (dx, dy, dz) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ y su longitud es: $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$ que llamaremos la diferencial de la longitud de arco. Podemos entonces escribir la fórmula para la longitud de arco como: $\boxed{L(c) = \int_{t_0}^{t_1} ds}$

Fin $\perp$